

L'analyse spatiale, ça sert à organiser un réseau ferré

La théorie des graphes - les indicateurs globaux

Pourquoi faut-il toujours passer par Paris pour aller en vacances en train ? Pour comprendre, on peut utiliser les méthodes de l'analyse spatiale, et examiner la répartition des lignes de chemins de fer en France.

Les bases théoriques : qu'est-ce qu'un graphe ?

Doc 1 : Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un **graphe** est une figure géométrique formée d'un ensemble de points appelés **sommets** ou **nœuds** et de lignes joignant ces sommets appelées **arêtes** ou liens. L'étude des graphes fait partie d'une branche des mathématiques appelée la topologie.

[...]

La **description globale** d'un réseau peut se faire au moyen de mesures tirées de la théorie des graphes. Le plus souvent, ces mesures ont été appliquées aux réseaux de transport. Il s'agit certes de décrire l'extension du réseau, par des indices de dimension, mais surtout de déterminer quel est le degré de **connectivité** du réseau, c'est-à-dire quelles sont les facilités qu'il offre pour relier directement deux sommets quelconques.

Les indices les plus fréquemment employés utilisent certaines propriétés des graphes dits **planaires**, c'est-à-dire ceux qui peuvent être représentés dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent en dehors des sommets. La plupart des réseaux de transport possédant des infrastructures matérielles, inscrites au sol, sont de ce type.

Pumain, D., & Saint-Julien, T. (2010). Chapitre 3. Réseaux et localisation. In Analyse spatiale (p. 103-137). Armand Colin.

Doc 3 : Les chemins de fer du pays imaginaire de l'Orée du Nord

Réalisation : Benhocine, Horeau, 2023

Doc 2 : Les chaînes

Dans un graphe, une **chaîne** (walk) reliant deux sommets x et y est définie par une suite finie de liens consécutifs reliant x à y, ces liens n'étant pas nécessairement orientés dans le même sens. Un **chemin** est une chaîne dont tous les liens sont orientés dans le même sens.

Une chaîne ou un chemin sont dits simples quand ils ne passent pas deux fois par le même lien et tous les liens sont donc distincts – en anglais, on parle de **trail**. Une chaîne ou un chemin sont dits élémentaires quand ils ne passent pas deux fois par le même sommet et tous les sommets sont donc distincts – path en anglais. Une chaîne ayant le même point de départ et d'origine est appelé un **cycle**. Un chemin ayant le même point de départ et d'origine est appelé un **circuit**.

La longueur d'une chaîne ou d'un chemin (path length) se mesure en nombre de liens nécessaires pour relier deux sommets. Si cette chaîne ou ce chemin est la plus courte possible entre deux sommets (shortest path), sa longueur est nommée distance géodésique.

Beauguitte, L. (2013, avril 20). C comme chaîne et chemin [Billet]. Groupe fmr (flux, matrices, réseaux). <https://groupefmr.hypotheses.org/1745>

Doc 4 : Quelques définitions...

Connectivité : Capacité d'accéder à tous les points d'un réseau en passant par les arêtes.

Composante connexe : Morceau d'un graphe qui n'est pas relié aux autres (une seule composante connexe si le graphe est connexe)

Connectivité : Possibilité de prendre plusieurs chemins pour accéder à un même point.

Nombre cyclomatique : nombre de cycles (chemins) possibles dans un graphe.

Questions de compréhension

Description d'un graphe

1-) Comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de composantes connexes du chemin de fer en Orée du Nord.

2-) Combien de cycles y-a-t'il dans le réseau Nord-Oréen ? Nommez les stations qui la (les) compose(nt).

Le cas pratique : un Rançais et un Lemand partent en vacances...

Doc 5 : Le réseau ferré de la Rance et de la Lemagne

27 stations
26 tronçons de rail

Réalisation : Benhocine, Horeau, 2023

23 stations
30 tronçons de rail

Réalisation : Benhocine, Horeau, 2023

Doc 6a : Les indicateurs globaux pour décrire un graphe

L'indice α (alpha index) correspond au nombre de cycles présents dans le graphe par rapport au nombre maximum de cycles possibles, il est égal à 0 lorsque le graphe est un arbre et à 1 pour un graphe complet. On peut l'interpréter comme la propension d'un réseau à offrir des chemins alternatifs entre deux points.

L'indice β (beta index) correspond au nombre de liens sur le nombre de sommets. Il permet de mesurer la complexité d'un réseau. β est inférieur à 1 pour les arbres et de graphes non connexes, égal à 1 pour les graphes ne possédant qu'un seul cycle et supérieur à 1 pour les graphes plus complexes.

L'indice γ (gamma index) correspond au nombre de liens par rapport au nombre maximum de liens possibles. Il peut être vu comme une version standardisée de l'indice β . Dans un graphe planaire, il permet de mesurer le degré de connectivité du réseau. Dans un réseau social, cette mesure renvoie à la densité du réseau.

Drevelle, M. (2013, mai 11). I comme indice(s) [Billet]. Groupe fmr (flux, matrices, réseaux). <https://groupefmr.hypotheses.org/1605>

Doc 6b : Calculer les indicateurs globaux

Nombre Cyclomatique : $Y_{\text{Nombre Cyclomatique}} = A_{\text{Arêtes}} - S_{\text{Sommets}} + C_{\text{composante connexe}}$

Indice Alpha : $\alpha = \frac{Y_{\text{Nb cyclomatique}}}{2 \times S_{\text{Sommets}} - 5}$

Indice Beta : $\beta = \frac{A_{\text{Arêtes}}}{S_{\text{Sommets}}}$

Indice Gamma : $\gamma = \frac{A_{\text{Arêtes}}}{3 \times (S_{\text{Sommets}} - 2)}$

Réalisé avec l'outil LaTeX

Exercice :

Calculs :

1-) Décrivez ces graphes, à partir des étapes vues dans l'exercice précédent. Calculez le nombre cyclomatique.

2-) Calculez les indicateurs globaux Alpha, Beta et Gamma, du réseau de la Rance et la Lemagne.

Interprétation :

3-) Expliquez le lien entre l'indicateur Alpha de la Rance et l'organisation de son réseau ferré. Comment appelle-t-on ce type de graphe ?

4-) Comparez l'indice Alpha de la Rance et de la Lemagne. Pourquoi doit-on forcément passer par Aris pour visiter toutes les autres stations de la Rance ?

5-) Comparez la connectivité du réseau ferré Rançais et Lemand.

Réalisation : Benhocine Amine ; Horeau Benoît

Réalisation : Benhocine Amine ; Horeau Benoît